CAPíTULO 17

A Equação da Onda

17.1. Fórmula de D´Alembert

Vamos reanalisar a equação da onda de outro ponto de vista, pelo menos no caso em que o ambiente é unidimensional[1]. As equações

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \triangle u; & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{17.1}$$

modelam o movimento de uma onda inicialmente com distribuição f e velocidade g (onde c é a velocidade de propagação da onda neste no meio ambiente considerado). Quando $n = 3$, essas equações retratam o movimento de uma onda do mar, ou de ondas sonoras. Para $n = 1$, modelam o deslocamento de uma corda vibrante. Neste capítulo, estudaremos apenas o caso $n = 1$ e portanto estamos interessados em:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{17.2}$$

Agora, a equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, pode ser reescrita formalmente da forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Em particular, funções que satisfaçam $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ (isto é, da forma $u(x,t) = f(x \mp ct)$, como vimos na aula anterior) devem resolver esta equação. Estas considerações sugerem a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

Fazendo $v(\xi, \eta) = u(x,t)$ e assumindo que u é de classe C^2, obtemos que v satisfaz $v_{\xi\eta} = 0$ e portanto que $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$, para um par de funções F, G. Assim,

$$u(x,t) = F(x + ct) + G(x - ct) \tag{17.3}$$

é um candidato a solução de (17.2). Para que de fato seja solução, temos que ter:

$$\begin{cases} f(x) = u(x,0) = F(x) + G(x) \\ g(x) = u_t(x,0) = F'(x) - cG'(x) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} F'(x) = cf'(x) + g(x) \\ G'(x) = cf'(x) - g(x) \end{cases}$$

e, logo, integrando de 0 a x:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\, dy + C_1 \\ G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\, dy + C_2 \end{cases}$$

Substituindo em (17.3), temos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= C_1 + \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(y)\, dy + C_2 + \frac{f(x+ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(y)\, dy = \\ &= C_1 + C_2 + \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy \end{aligned}$$

[1] *Este capítulo e o próximo são simplificações para o caso em que a variável espacial é unidimensional, do material sobre problemas hiperbólicos contido no livro John, Fritz - Partial Differential Equations.*

em particular, $u(x,0) = C_1 + C_2 + f(x)$ e portanto, usando a segunda equação de (17.2), temos que $C_1 + C_2 = 0$ e conseqüentemente,

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\ dy$$

é um candidato a solução de (17.2).

Falta agora a volta: será que esta fórmula nos dá uma solução? Para tanto, temos o seguinte teorema, cuja demonstração simples é deixada como exercício.

TEOREMA 135 (Fórmula de d'Alembert). *Se $f \in C^2$ e $g \in C^1$, então*

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\ dy \tag{17.4}$$

satisfaz as equações (17.2).

EXEMPLO 136. *Encontre a solução de*

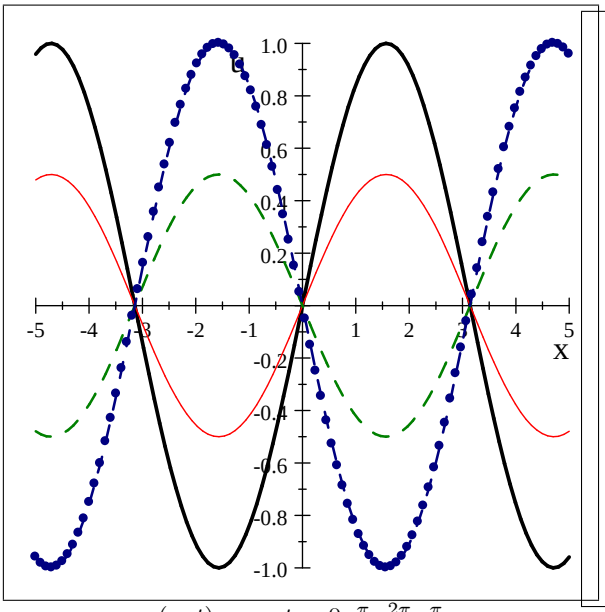
$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \sin x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Jogando tudo na fórmula de d'Alembert, temos diretamente (note que $c = 3$):

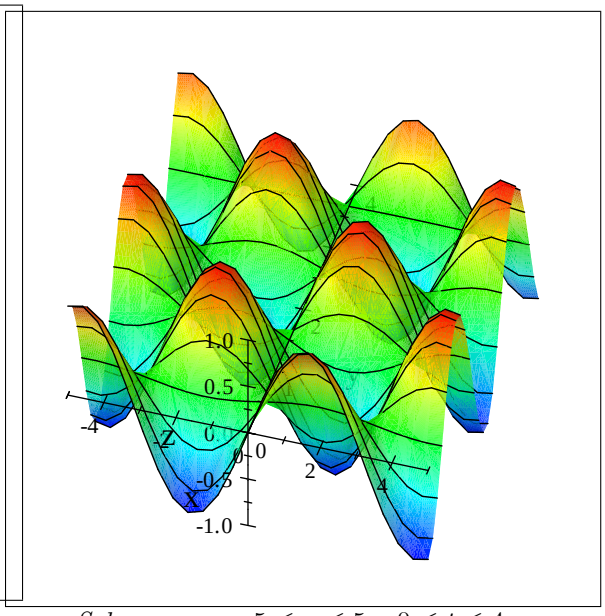
$$u(x,t) = \frac{\sin(x+3t) + \sin(x-3t)}{2}$$

Olhando a solução escrita desta forma, vemos duas senóides de amplitude $\frac{1}{2}$ cada, uma viajando para a esquerda com velocidade 3 e a outra para a direita com velocidade 3. No entanto, a solução é a superposição destas duas ondas. Se reescrevermos a solução abrindo aqueles senos

$$u(x,t) = \sin x \cos 3t$$



$u(x,t)$ *para* $t = 0, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}$



Soluçao para $-5 \le x \le 5$ *e* $0 \le t \le 4$.

vemos que a solução é sempre uma senóide em x, com amplitude $\cos 3t$. Assim, o que "vemos"é uma senóide de frequência fixa, cuja amplitude oscila rapidamente entre 1 e -1.

17.2. Soluções Fracas

No problema da onda, muitas vezes estamos interessados em soluções não clássicas (isto é soluções que não sejam de classe C^2). Assim, dizemos que a fórmula de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\ dy$$

é uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mesmo quando $f \notin C^2$ ou $g \notin C^1$.

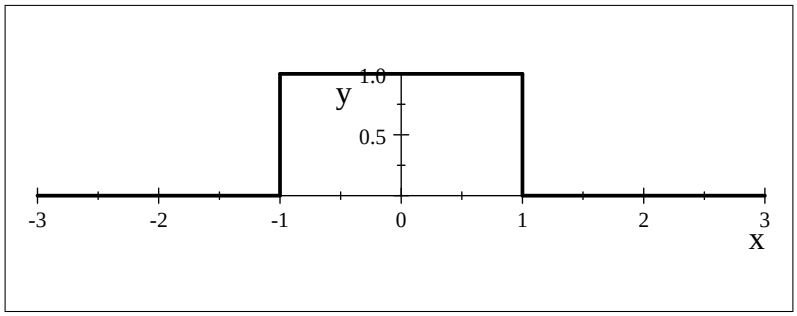
EXEMPLO 137. *Vamos obter uma solução fraca de*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0; & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1; & |x| \leq 1 \\ 0; & |x| > 1 \end{cases} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Usando a fórmula de d'Alembert, temos imediatamente a solução

$$u(x,t) = 0 + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x)\, dx$$

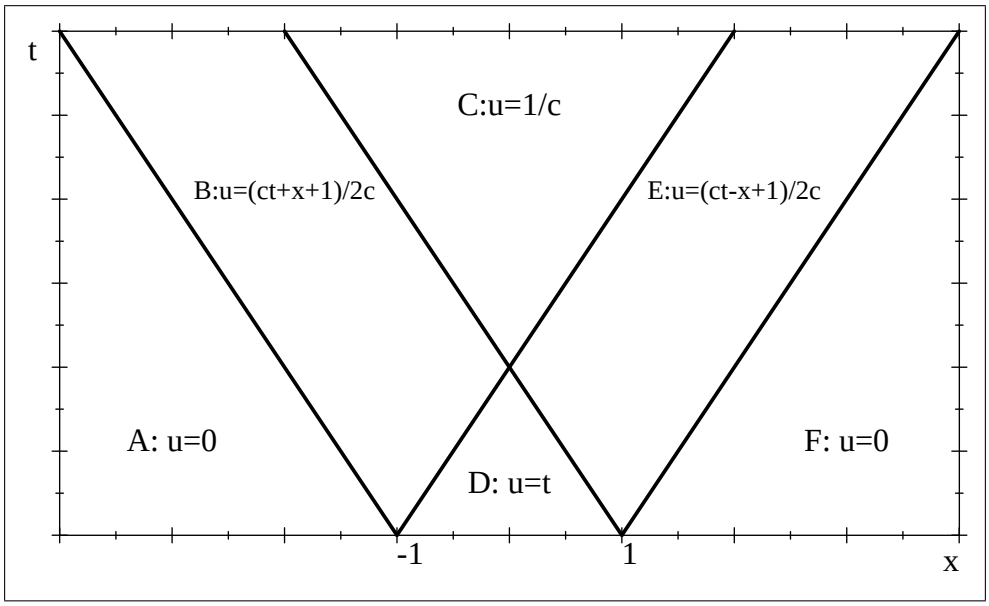
O problema é, como calcular corretamente a integral de $g(x)$ acima? O gráfico de $g(x)$ é simples:



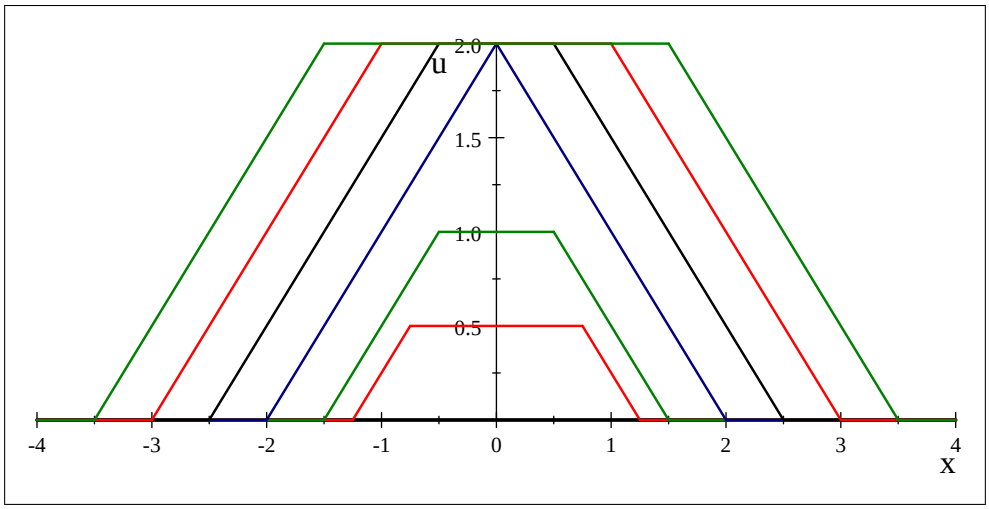
mas os limites de integração dependem de x e t. Para fazer a conta, precisamos abrir os seguintes casos:

- *CASO A: $x - ct \leq x + ct \leq -1$. O intervalo de integração está à esquerda de -1, então $u(x,t) = 0$.*
- *CASO B: $x - ct \leq -1 \leq x + ct \leq 1$. Então a integral é $\int_{-1}^{x+ct} 1dx$, e $u(x,t) = \frac{x+ct+1}{2c}$.*
- *CASO C: $x - ct \leq -1 < 1 \leq x + ct$. Então a integral toma a área toda sob o gráfico de $g(x)$, e $u(x,t) = \frac{1}{c}$.*
- *CASO D: $-1 \leq x - ct \leq x + ct \leq 1$. Então a integral é $\int_{x-ct}^{x+ct} 1dx = 2ct$ e $u(x,t) = t$.*
- *CASO E: $-1 \leq x - ct \leq 1 \leq x + ct$. A integral é $\int_{x-ct}^{1} 1dx$ e $u(x,t) = \frac{1-x+ct}{2c}$.*
- *CASO F: Enfim, se $1 \leq x - ct \leq x + ct$, então a integral se anula, e $u(x,t) = 0$ de novo.*

Estes casos todos podem ser ilustrados no plano xt abaixo:



Observe que a solução obtida é de classe C^2 exceto nas semiretas $x \pm ct = \pm 1, t > 0$ e de classe C^0 em $R \times (0, \infty)$. Os gráficos a seguir ilustram esta solução para diversos valores de t.

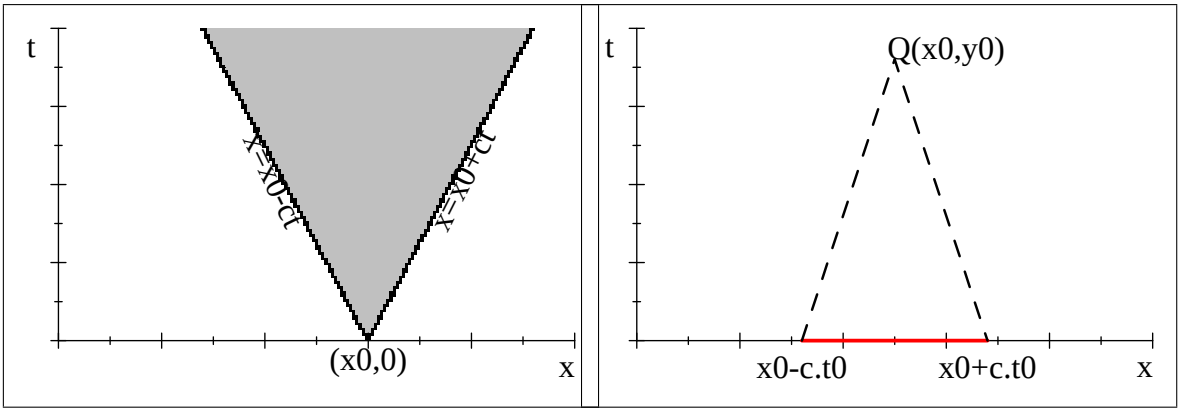


No platô central das soluções a velocidade de subida é 1*, enquanto nas partes inclinadas a onda sobe com velocidade* $\frac{1}{2}$*. De certa forma, o intervalo* $[-1,1]$ *que inicialmente subia com velocidade* 1 *"puxa"os seus vizinhos, que sobem com velocidade menor; por outro lado, tais vizinhos "seguram"uma parte cada vez maior do intervalo* $[-1,1]$*, até que, para* $t=\frac{1}{c}$*, não há mais pontos subindo com velocidade* 1 *e o platô central pára de subir. A partir daí, tudo que se vê é um movimento horizontal de duas frentes de onda, uma para cada lado.*

O exemplo acima ilustra duas propriedades importantes da equação da onda:

(1) O ponto $P=(x_0,0)$ influencia a região (denominada *região de influência de* P) $\{(x,t) \mid x_0-ct \leq x \leq x_0+ct, t>0\}$ (veja a figura abaixo).

(2) O valor de u no ponto $Q=(x_0,t_0)$ depende das condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$ apenas no intervalo $x \in [x_0-ct_0, x_0+ct_0]$. Este intervalo é chamado de *domínio de dependência do ponto* Q (veja a figura abaixo).



Regiao de Influência Domínio de Dependência

17.3. Exercícios

1) Mostre que, se $f \in C^2$ (isto é,$f''(x)$ existe e é contínua) e $g \in C^1$ (isto é, $g'(x)$ existe e é contínua) então a fórmula de d´Alembert

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

dá uma solução do problema da onda com condições iniciais

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) Encontre a solução $u(x,t)$ (e o seu valor máximo) para o problema da onda

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

em cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 1$;

b) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = c\cos x$;

c) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = k\sin x$;

Respostas: a) $u(x,t) = \sin x\cos ct + t$ *não tem máximo; b)* $u(x,t) = \sin(x+ct)$ *tem valor máximo* 1*; c)* $u(x,t) = \sin x\left(\cos ct + \frac{k}{c}\sin ct\right) = \frac{\sqrt{c^2+k^2}}{c}\sin x\cos(ct-\alpha)$ *onde* $\alpha = \arctan\frac{k}{c}$ *tem amplitude máxima* $\frac{\sqrt{c^2+k^2}}{c}$.

3) Encontre a solução fraca do seguinte Problema de Valor Inicial da Onda, esboce-a no plano xt e esboce-a no plano xu para vários valores distintos de t.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x|\le L \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}; & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0; & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } |x+ct|\le L \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } |x-ct|\le L \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

ou seja, $u(x,t)$ *é simplesmente a superposição de dois pulsos quadrados, ambos com largura* $2L$ *e altura* $\frac{1}{2}$*, viajando em direções opostas com velocidade* c*. Note que, para* $t \ge \frac{L}{c}$*, os pulsos podem ser claramente identificados (não havendo mais a interferência da superposição)*

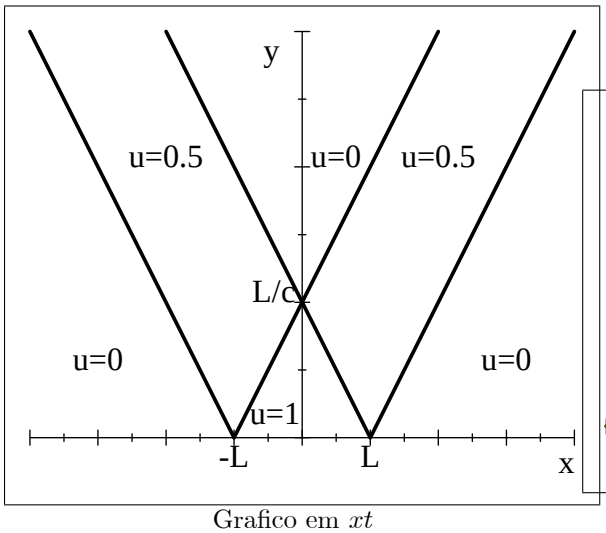
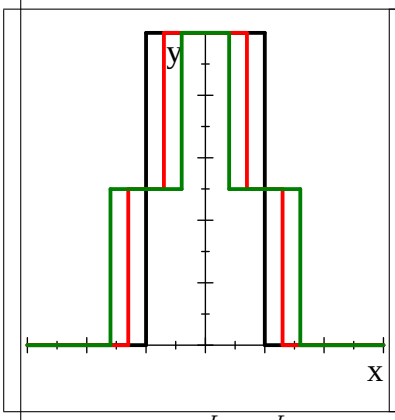
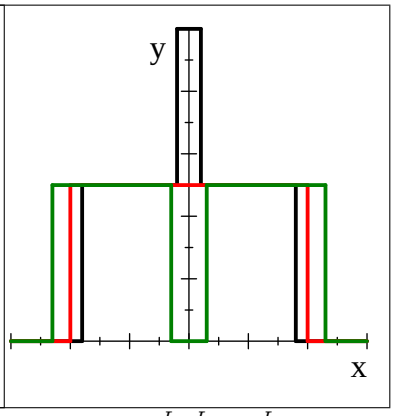


Grafico em xt



$t = 0, 0.3\frac{L}{c}, 0.6\frac{L}{c}$



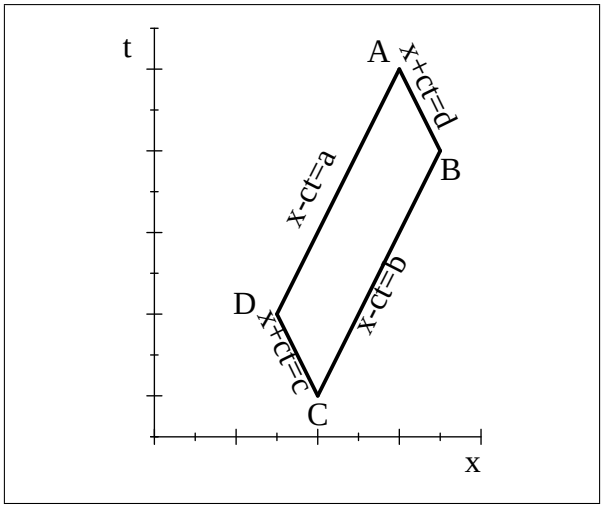
$t = 0.8\frac{L}{c}, \frac{L}{c}, 1.3\frac{L}{c}$

CAPíTULO 18

A Regra do Paralelogramo e a Corda Finita

Se $u(x,t)$ satisfaz a EDP da onda, então $u(x,t)$ obedece à seguinte importante propriedade:

LEMA 138 (Regra do "Paralelogramo"). *Seja $u(x,t)$ uma função que satisfaz $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Se A, B, C e D são vértices consecutivos do paralelogramo cujos lados pertencem às retas $x - ct = a, x - ct = b, x + ct = c$ e $x + ct = d$, com $a < b < c < d$, $t > 0$ então $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.*

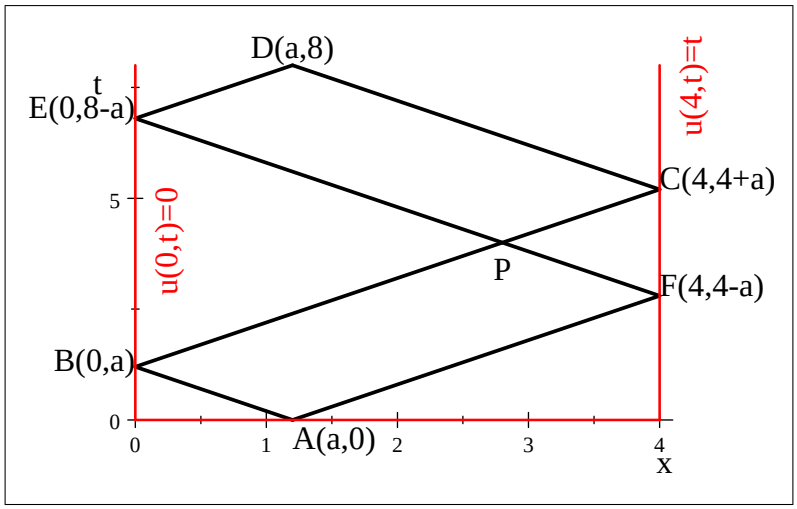


DEMONSTRAÇÃO. Lembremos que, via uma mudança de variáveis, temos que $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ onde F e G são funções de uma variável cada. Então

$$\begin{aligned} u(A) &= F(d) + G(a) \\ u(B) &= F(d) + G(b) \\ u(C) &= F(c) + G(b) \\ u(D) &= F(c) + G(a) \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. □

EXEMPLO 139. *Suponha que $u(x,t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ e também $u(0,t) = 0$, $u(4,t) = t$. Calculemos $u(a,8)$ em função de $u(a,0)$. Para tanto, basta considerar o diagrama*



onde todos os segmentos de reta desenhados são da forma $x \pm t = cte$. (isto é, paralelos às curvas características da equação da onda, já que neste caso $c = 1$). Usando a regra do paralelogramo em $ABPF$ e $DCPF$, temos

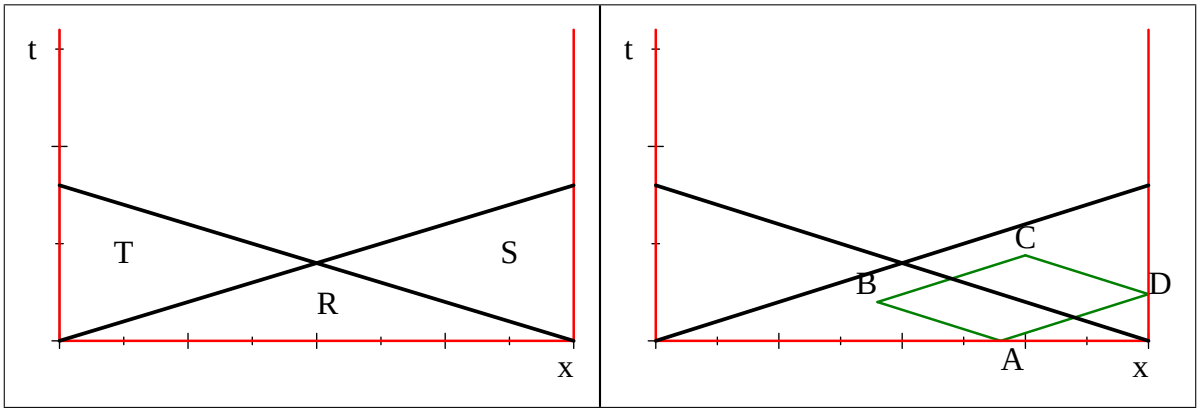
$$\begin{aligned} u(D) &= u(C) + u(E) - u(P) = u(C) + u(E) - (u(B) + u(F) - u(A)) = u(A) + u(C) + u(E) - u(B) - u(F) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(D) = u(a,0) + (4+a) + 0 - 0 - (4-a) = u(a,0) + 2a \end{aligned}$$

Note que, usando este tipo de raciocínio, é possível calcular $u(x, t+8)$ em função de $u(x,t)$ para qualquer t real no domínio de u.

O exemplo acima ilustra uma abordagem para resolver o problema da onda quando são dadas condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$. Assim, considere o seguinte problema que modela o movimento de uma corda vibrante de comprimento L:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } x \in (0, L) \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = h_1(t) \text{ para } t > 0 \\ u(L,t) = h_2(t) \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0, L) \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ para } x \in (0, L) \end{cases}$$

Use as curvas características que se propagam a partir de $(0,0)$ e $(L,0)$ para dividir a faixa $0 < x < L$ e $t > 0$ em regiões: $R : ct < x < L - ct$, $S : ct < x; L - ct < x$ e $T : x < ct; x < L - ct$:

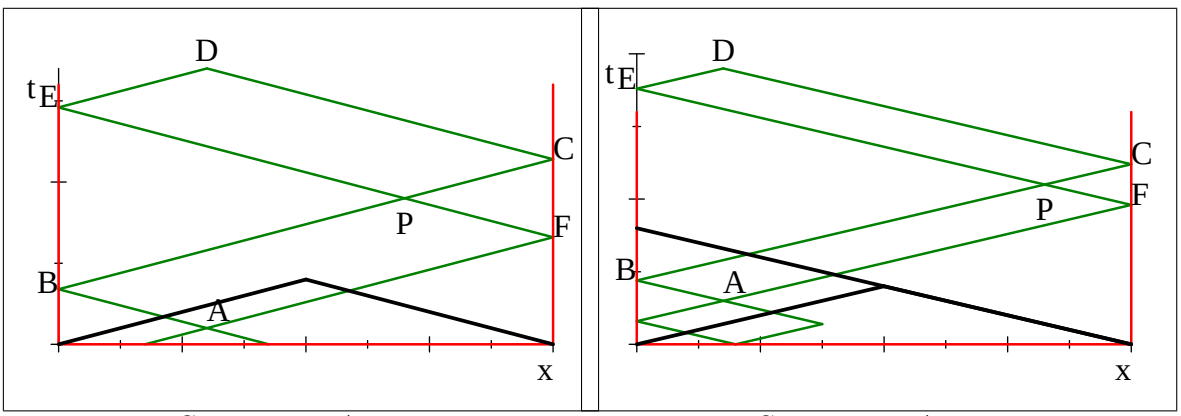


Pela fórmula de D´Alembert, na região R a solução depende apenas das condições iniciais:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$$

Já nas regiões $S = \{(x,t); ct < x; L - ct < x, t > 0\}$ e $T = \{(x,t); x < ct; x < L - ct, t > 0\}$ uma aplicação da regra do paralelogramo é suficiente para calcular $u(x,t)$. Por exemplo, na figura à direita, podemos calcular $u(C)$ em função de $u(D)$ (que é obtido pela condição de contorno $u(L, t_D) = h_2(t_D)$), $u(A)$ (que é dado pela condição inicial $u(x_A, 0) = f(x_A)$) e $u(B)$ (que pode ser calculado pela fórmula de d'Alembert pois B está na região R).

Em geral, para um ponto qualquer $D = (x,t)$, um diagrama análogo ao do exemplo anterior permite colocar $u(D)$ em função de $u(A)$ onde A está em uma das regiões R, S ou T. Assim, é possível encontrar fórmulas explícitas para $u(x,t)$ em toda a faixa $(0, L) \times (0, \infty)$.



Caso em que $A \in R$ Caso em que $A \in T$

18.1. Exercícios

1) Uma função $u(x,t)$ satisfaz $u_{tt} = 4u_{xx}$ para quaisquer x, t reais. Sabe-se que $u(0,0) = 12$, $u(4,2) = -5$ e $u(-4,2) = 3$. Calcule $u(0,4)$.

Resposta: $u(0,4) = -14$.

2) Uma função $u(x,t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ para todos x, t reais. Sabe-se que $u(1,0) = 0$, $u(0,t) = 0$ e $u(2,t) = t$ para quaisquer x e t reais. Calcule $u(1,2)$, $u(1,4)$, $u(3,2)$ e $u(3,4)$ e mostre que $u(1,2n) = n$ para todo n inteiro positivo.

Resposta: $u(1,2) = 1$, $u(1,4) = 2$, $u(3,2) = 3$ e $u(3,4) = 6$.

3) Uma função $u(x,t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ para todos x, t reais. Sabe-se que $u(0,t) = 0$ e $u(2,t) = t$ para todo t real. Seja $x_0 \in (0,1)$; calcule $u(2-x_0,2)$ e $u(x_0,4)$ em função de $u(x_0,0)$ e x_0.

Respostas: $u(2-x_0,2) = u(0,x_0) + u(2,2-x_0) - u(x_0,0) = 2 - x_0 - u(x_0,0)$ e $u(x_0,4) = u(0,4-x_0) + u(2,x_0+2) - u(2-x_0,2) = u(x_0,0) + 2x_0$.

4) Uma função $u(x,t)$ satisfaz $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para todos x, t reais. Suponha que $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para todo t real. Mostre que, se $x_0 \in (0,L)$, então $u(x_0,0) = -u\left(L - x_0, \frac{L}{c}\right) = u\left(x_0, \frac{2L}{c}\right)$ – em particular, u é periódica de período $\frac{2L}{c}$ na direção t.

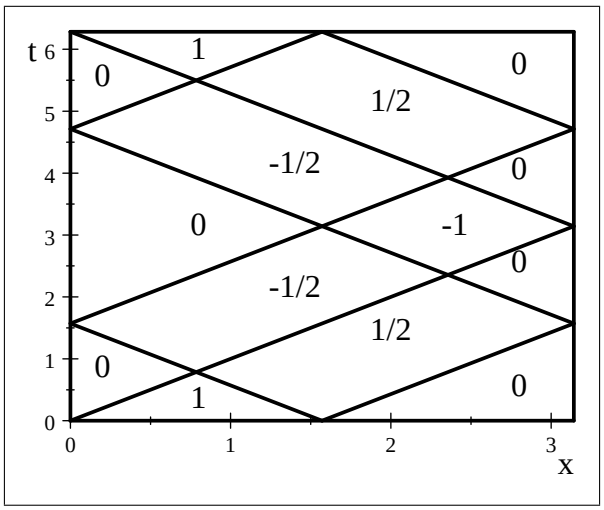
5) No exercício 7 do capítulo 11, você usou o Método da Separação de Variáveis para mostrar que a solução

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \text{ se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

tem a seguinte expansão em série de Fourier[1]

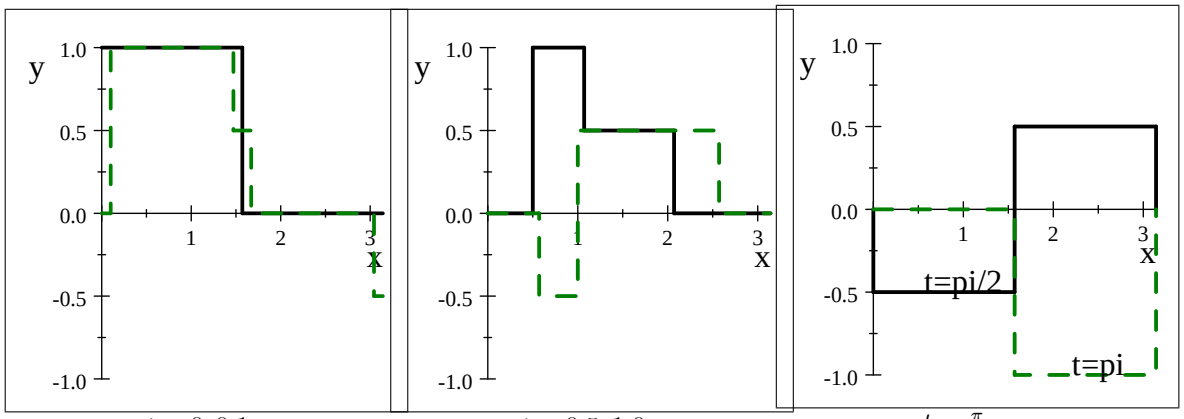
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m}\left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)\cos(mt)\sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x + \cos 3t \frac{\sin 3x}{3} + \cos 5t \frac{\sin 5x}{5} + \cos 6t \frac{\sin 6x}{3} + \cos 7t \frac{\sin 7x}{7} + ...\right) \end{aligned}$$

Use agora a Regra dos Paralelogramos para mostrar que esta solução fraca é, de fato, constante em cada uma das regiões esboçadas a seguir (com os valores indicados). Usando este diagrama, esboce $u(x,t)$ versus x para os seguintes valores de t: $0, 0.1, 0.5, 1, \frac{\pi}{2}, \pi$ e 2π.



[1] Vale a pena citar que cada um dos termos do somatório a seguir é chamado de uma *onda estacionária* (que não deve ser confundido com o "estado estacionário"da equação do calor).

Resposta: Os gráficos para $t = 0$ e $t = 2\pi$ são idênticos. Os outros são[2]*:*

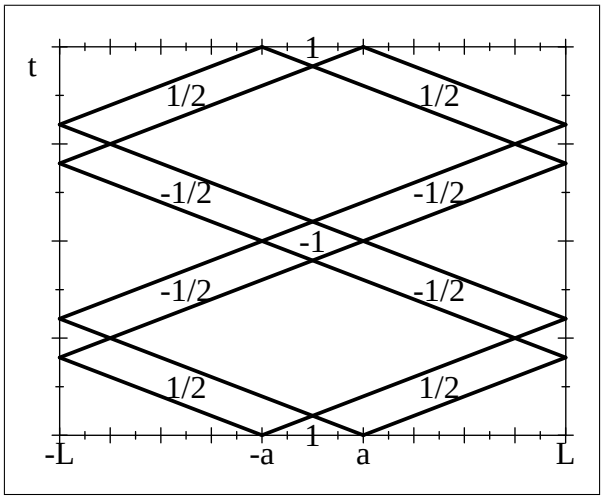


$t = 0, 0.1$ $\quad$ $t = 0.5, 1.0$ $\quad$ $t = \frac{\pi}{2}, \pi$

6) Suponha $a \ll L$. Use a Regra dos Paralelogramos para determinar e esboçar, no plano xt, a solução fraca de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (-L, L) \times (0, \infty) \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x| \leq a \\ 0, \text{ se } a < |x| \leq L \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Resposta: nas regiões sem rótulo vale $u = 0$:



[2]Veja o filme no site da disciplina!